

## Section : Économie et gestion

## Épreuve : Mathématiques

## Exercice 1

I) 1)a) La courbe  $\zeta$  de  $f$  passe par les points  $O(0,0)$  et  $B(1, 2e)$ , d'où  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 2e$ .

b) La tangente en  $O$  à la courbe  $\zeta$  est la droite  $(OA)$ , où  $A(1,2)$ .

La droite  $(OA)$  a pour équation  $y = 2x$ . D'où  $f'(0) = 2$ .

La tangente à la courbe au point d'abscisse  $-1$  est horizontale, donc  $f'(-1) = 0$ .

2) On a  $f'(0) = 2$  et  $f'(-1) = 0$ .

- Dans la figure 1, l'image de  $0$  par la fonction est  $1$ . Donc cette courbe ne peut pas être celle de  $f'$ , car  $f'(0) = 2$ .
- La courbe dans la figure 2, est celle d'une fonction qui est toujours positive. D'autre part, par une lecture graphique de la courbe  $\zeta$  de la fonction  $f$ , on peut remarquer que la fonction  $f$  est décroissante puis croissante donc  $f'$  change de signe. Ainsi cette courbe ne peut pas être celle de  $f'$ .

Par élimination, la courbe de  $f'$  est celle représentée dans la figure 3.

II)1)a)  $f(x) = 2xe^x; x \in \mathbb{R}$ .

La valeur exacte du minimum de  $f$  est  $f(-1) = -2e^{-1} = \frac{-2}{e}$ .

b) Le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = -0,7$  est le nombre de points

d'intersection de la courbe  $\zeta$  de  $f$  et la droite  $D$  d'équation  $y = -0,7$ . On a  $-0,7 > \frac{-2}{e}$

donc la droite  $D$  coupe la courbe en deux points distincts. Ainsi l'équation admet deux solutions distinctes.

2)  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

a) L'intégrale  $I$  est l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $\zeta$  de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations :  $x = 0$  et  $x = 1$ .

b)  $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2xe^x dx = 2 \int_0^1 xe^x dx$ .

On pose :  $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

D'où  $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$ .

Ainsi  $I = 2$ .

c) On désigne par  $A$ , l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par la courbe  $\zeta$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $y = 2e$ .

$$A = \int_0^1 (2e - f(x)) dx = \int_0^1 2e dx - \int_0^1 f(x) dx = 2e - 1 = 2e - 2 = 2(e - 1) \text{ u.a.}$$

## Exercice 2

On a la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{6 - u_n}{4 - u_n}$ .

1)a) Montrons par récurrence que  $u_n < 2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- $u_0 = 0 < 2$  d'où l'inégalité est vérifiée pour  $n = 0$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que l'inégalité est vraie pour  $n$ . C'est-à-dire  $u_n < 2$ .
- Montrons que l'inégalité est vraie pour  $n + 1$ .

$$u_{n+1} - 2 = \frac{6 - u_n}{4 - u_n} - 2 = \frac{6 - u_n - 2(4 - u_n)}{4 - u_n} = \frac{u_n - 2}{4 - u_n}.$$

On a  $u_n < 2 \Rightarrow u_n - 2 < 0$  et  $4 - u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{u_n - 2}{4 - u_n} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < 2$$

D'où l'inégalité est vraie pour  $n + 1$ .

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence,  $u_n < 2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$b) u_{n+1} - u_n = \frac{6 - u_n}{4 - u_n} - u_n = \frac{6 - u_n - u_n(4 - u_n)}{4 - u_n} = \frac{u_n - 5u_n + 6}{4 - u_n} = \frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{4 - u_n}.$$

c) Montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante.

$$\text{On a d'après la question précédente : } u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{4 - u_n}.$$

D'autre part  $u_n < 2 \Rightarrow u_n - 2 < 0$ ,  $u_n - 3 < 0$  et  $4 - u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{4 - u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n.$$

Ainsi la suite  $(u_n)$  est croissante.

d) On a  $u_n < 2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc la suite  $(u_n)$  est majorée par 2.

La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée, donc elle est convergente.

2) Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{2u_n - 6}{u_n - 2}$ .

a) Montrons que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2.

$$v_{n+1} = \frac{2u_{n+1} - 6}{u_{n+1} - 2} = \frac{2 \frac{6 - u_n - 6}{4 - u_n} - 6}{\frac{6 - u_n - 6}{4 - u_n} - 2} = \frac{2(6 - u_n) - 6(4 - u_n)}{6 - u_n - 2(4 - u_n)} = \frac{4u_n - 12}{u_n - 2} = 2 \frac{2u_n - 6}{u_n - 2} = 2v_n.$$

On a  $v_{n+1} = 2v_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'où  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2.

b)  $v_0 = \frac{2u_0 - 6}{u_0 - 2} = 3.$

$(v_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $v_0 = 3$  et de raison 2.

D'où  $v_n = 3 \times 2^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

c) On a :  $v_n = \frac{2u_n - 6}{u_n - 2} \Leftrightarrow v_n(u_n - 2) = 2u_n - 6.$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - 2v_n = 2u_n - 6$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - 2u_n = 2v_n - 6$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 2) = 2v_n - 6$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n - 6}{v_n - 2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{6 \times 2^n - 6}{3 \times 2^n - 2} = \frac{6 \times 2^n (1 - \frac{1}{2^n})}{2^n (3 - \frac{1}{2^n})} = \frac{6(1 - \frac{1}{2^n})}{3 - \frac{1}{2^n}} = \frac{6 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right]}{3 - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n}.$$

Ainsi  $u_n = \frac{6 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right]}{3 - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right]}{3 - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^n} = \frac{6}{3} = 2$  ; car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0.$

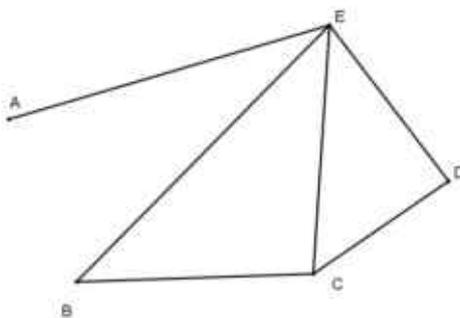
### Exercice 3

G un graphe de sommets A, B, C, D et E et dont la matrice associée est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1)a) On peut remarquer que la matrice M est symétrique par rapport à sa diagonale, donc le graphe G n'est pas orienté.

b) L'ordre du graphe G (le nombre de sommets) est 5.



2)

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	2	3	2	4

3)a) Un sous graphe complet d'ordre 3, du graphe G, est un sous graphe de G, d'ordre 3 et dont chaque sommet est adjacent aux deux autres.

On a les sous graphes E-C-D et E-B-C sont deux sous graphes complets de G, d'ordre 3.

b) On note  $\gamma(G)$  le nombre chromatique du graphe G.

Le nombre chromatique  $\gamma(G)$  du graphe G est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous graphes complets, donc  $\gamma(G) \geq 3$ .

D'autre part le plus grand degré des sommets de G est 4 (degré de E), d'où  $\gamma(G) \leq 4 + 1 = 5$ . On a ainsi  $3 \leq \gamma(G) \leq 5$ .

4) On ordonne les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés : E-C-B-D-A.

On attribue une couleur  $C_1$  au sommet E. Tous les autres sommets sont adjacents à E, donc on ne peut pas attribuer cette couleur une autre fois. On attribue une couleur  $C_2$  au sommet C, on peut attribuer cette couleur au sommet A puisqu'il n'est pas adjacent à C. On peut attribuer aux sommets B et D la même couleur  $C_3$ . Ainsi  $\gamma(G) = 3$ .

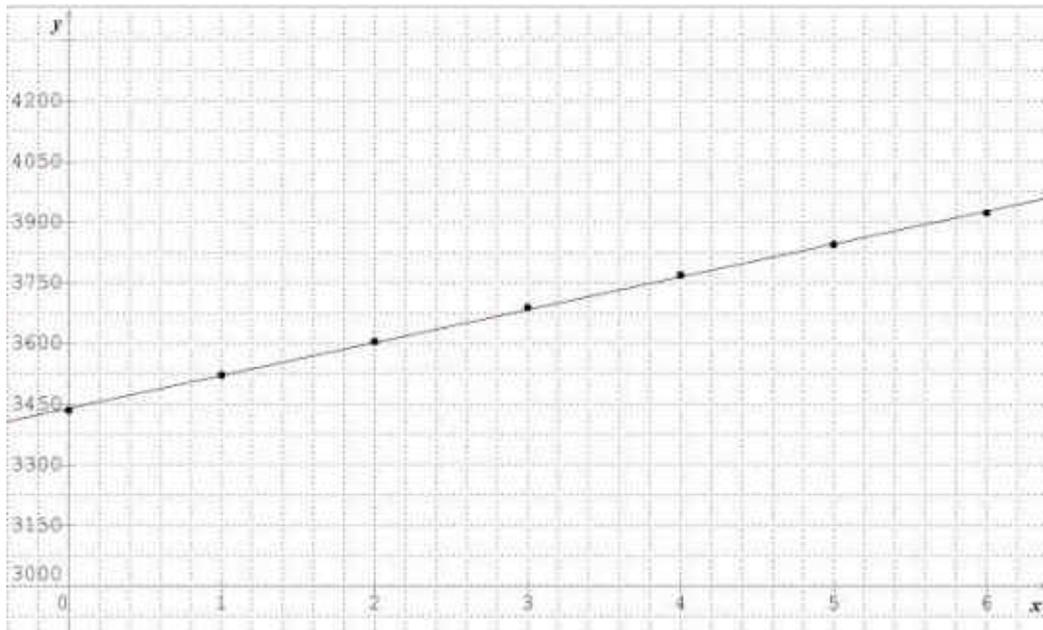
#### Exercice 4

L'évolution de la population active en Tunisie de 2006 à 2012 est donnée par la tableau suivant :

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année (x)	0	1	2	3	4	5	6
Population active en milliers (y <sub>i</sub> )	3435	3522	3604	3689	3769	3845	3923

Source : Institut National de Statistique (INS)

1)a) Le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i, y)$  :



b) La forme allongée du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

2)a) On utilisant la calculatrice on détermine les coefficients  $a = 81,25$  et  $b = 3440,107$ .

La droite de régression de  $y$  en  $x$  a pour équation :  $y = 81x + 3440$  (en arrondissant les coefficients à l'unité).

b) Voir figure.

c) Le rang de l'année 2015 est  $x = 9$  donc  $y = 81 \times 9 + 3440 = 4169$ .

Une estimation de la population active de la Tunisie en 2015 est 4169 000.