RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session de contrôle	2024
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**	
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**	

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5. **La page 5/5 est à rendre avec la copie**.

Exercice 1 (4 points) :

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : \frac{1}{2}z^2 - e^{i\frac{\pi}{6}}z + \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1\right) = 0$.

1) a) Vérifier que le discriminant $\Delta = i^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points

A, B et I d'affixes respectives $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}} + i$, $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}} - i$ et $z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a) Montrer que le point I est le milieu de $[AB]$ et que $IO = IA$.

b) En déduire que les points O, A et B appartiennent au cercle de diamètre $[AB]$.

3) On désigne par C le point d'affixe $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a) Montrer que le quadrilatère $OBCA$ est un rectangle.

b) Montrer que $z_A z_B = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

c) En déduire l'aire du rectangle $OBCA$.

Exercice 2 (5 points) :

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les points $A(0,0,1)$, $B(2,1,1)$ et $C(-1,0,2)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C définissent un plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x - 2y + z - 1 = 0$.

2) a) Justifier que le point $I(1,0,-2)$ n'appartient pas au plan P.

b) Calculer le volume du tétraèdre $IABC$.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$$x^2+y^2+z^2-2x+4z+4=0.$$

a) Montrer que S est la sphère de centre $I(1,0,-2)$ et de rayon $R=1$.

b) Vérifier que le point $H\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point I sur le plan P.

c) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle $\mathscr{C}$ que l'on caractérisera.

4) Soit S' la sphère de centre $I'\left(\frac{1}{2},1,-\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $R'=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne de S' est : $x^2+y^2+z^2-x-2y+5z+3=0$.

b) Montrer que :

$$M(x,y,z)\in S\cap S' \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4z+4=0 \\ x-2y+z-1=0 \end{cases}.$$

c) Déduire $S\cap S'$.

Exercice 3 (4.5 points) :

Une usine fabrique des batteries pour voitures peut présenter deux défauts d_1 et d_2.

Une étude statistique de la production a montré que :

* 5% de ces batteries ont le défaut d_1.

* Parmi les batteries ayant le défaut d_1, 8% ont le défaut d_2.

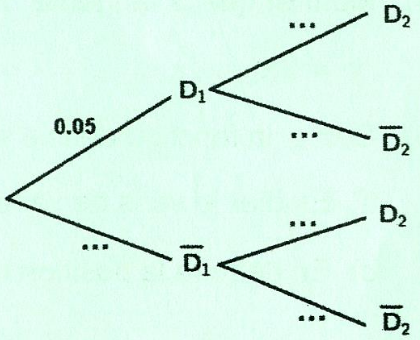
* Parmi les batteries n'ayant pas le défaut d_1, 4% ont le défaut d_2.

Un client achète au hasard une batterie. On désigne par D_1 et D_2 les évènements suivants:

D_1 : « La batterie présente le défaut d_1 ».

D_2 : « La batterie présente le défaut d_2 ».

1) a) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



b) Quelle est la probabilité pour que la batterie choisie présente les deux défauts ?

c) Montrer que $p\left(D_2\right) = 0.042$.

d) Sachant que la batterie choisie ne présente pas le défaut d_2, quelle est la probabilité qu'elle présente le défaut d_1 ?

2) La durée de vie, **en mois,** d'une batterie sans défaut est une variable aléatoire X continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.02$.

Les valeurs demandées seront arrondies au millième.

a) Montrer que la probabilité qu'une batterie dure moins de 24 mois est égale 0.381.

b) Sachant qu'une batterie a duré 2 ans, quelle est la probabilité qu'elle dure moins de 3 ans ?

Exercice 4 (6.5 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - (2 + x^2)e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$. Interpréter graphiquement.

2) Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (Γ) de la fonction f' dérivée de f et la droite Δ d'équation $y = 2$.

Par une lecture graphique :

a) Déterminer le signe de f'.

b) Déterminer $f'(0)$.

c) Justifier que $f'(x) - 2 \geq 0$ pour tout $x \leq 0$ et que $f'(x) - 2 \leq 0$ pour tout $x \geq 0$

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que la tangente T à la courbe (C) au point O a pour équation cartésienne $y = 2x$.

5) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - 2x$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) En déduire la position relative de la courbe (C) par rapport à la tangente T.

6) Tracer, dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la feuille annexe, la tangente T et la courbe (C)

.

7) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

b) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 2 - f'(x) - 2xe^{-x}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

d) Montrer que $\int_0^1 f(x)dx = -2 + \frac{7}{e}$.

e) Déduire l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C),

la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session de contrôle (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure