RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session de contrôle	2024
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**	
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**	

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+i)(\sqrt{3}-i)z+2\sqrt{3}=0$.

   a) Vérifier que $(1+i)^2(\sqrt{3}+i)^2=-4\sqrt{3}+4i$.

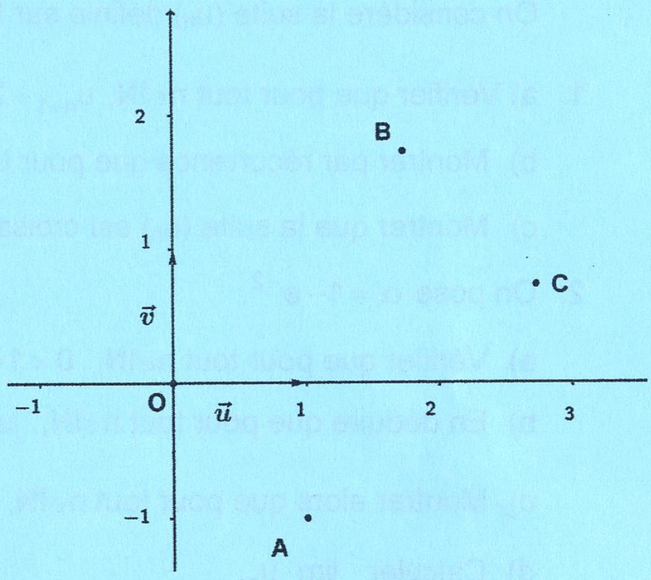
   b) Résoudre l'équation (E).

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1-i$, $z_B=i\sqrt{3}\,z_A$ et $z_C=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$.

   a) Donner l'écriture exponentielle de z_A.

   b) Montrer que $z_A+z_B=z_C$.

   Dans la figure ci-contre, on a placé les points A, B et C.



3. Montrer que OACB est un rectangle.

4. Soient I le centre de OACB et G le centre de gravité du triangle OAI.

   On désigne par z_I et z_G les affixes respectives des points I et G.

   a) Donner l'écriture exponentielle de z_I.

   b) Montrer que le triangle OAI est équilatéral.

   c) Montrer que $z_G=\frac{1}{3}(z_I+z_A)$, en déduire que $z_G=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$.

   d) Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=\sqrt{3}$.

   e) Donner l'écriture exponentielle de z_G.

Exercice 2 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(1, 1, 1), B(2, – 3, – 2), C(3, 3, 0) et I(3, 0, 3).

1. a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.

   b) Justifier qu'une équation cartésienne de P est $2x - y + 2z - 3 = 0$.

   c) Vérifier que le point I n'appartient pas au plan P.

2. Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6z - 7 = 0$.

   a) Montrer que (S) est la sphère de centre I et de rayon 5.

   b) Montrer que P coupe (S) suivant le cercle (ζ) de centre A et de rayon r = 4.

3. Soit H le point tel que I est le milieu du segment $[AH]$.

   a) Montrer que les coordonnées de H sont (5, –1,5).

   b) Justifier que H appartient à la sphère (S') de centre I et de rayon 3.

   c) Soit Q le plan tangent à (S') au point H.

   Montrer que les plans P et Q sont parallèles.

   d) Montrer que le plan Q coupe (S) suivant un cercle (ζ') dont on déterminera le rayon.

Exercice 3 (4.5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (2 - u_n)e^{-u_n} + u_n \end{cases}$.

1. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 = (1 - e^{-u_n})(u_n - 2)$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

2. On pose $\alpha = 1 - e^{-2}$.

   a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1 - e^{-u_n} < \alpha$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| < \alpha |u_n - 2|$.

   c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \le \alpha^n$.

   d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

   a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2 - \alpha^k \le u_k \le 2 + \alpha^k$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2(n+1) - \dfrac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \le S_n \le 2(n+1) + \dfrac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$.

   c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 4 (6.5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}+\ln x$ et on désigne par (ζ_f) sa courbe dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$. Interpréter graphiquement.

2. a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x^3}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

3. Montrer que la tangente Δ à la courbe (ζ_f) au point $A(1, 1)$ est d'équation $y = x$.

4. On considère la fonction h définie sur $]1,+\infty[$ par $h(x) = \ln(x-1)$.

   a) Montrer que pour tout $x\in\,]1,+\infty[$, $f(x)>h(x)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)-h(x)]$.

Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (ζ_h) de la fonction h, la droite $\Delta : y = x$ et on a placé le réel α.

5. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (ζ_f).

6. Pour tout réel $\lambda > 2$, on désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (ζ_f) et (ζ_h) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = \lambda$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

   $$\int_2^{\lambda}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)dx=\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)+\ln(\lambda-1)-2\ln 2.$$

   b) En remarquant que $\dfrac{2x-1}{x^2}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$, montrer que

   $$\mathcal{A}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+2\ln\lambda+\ln(\lambda-1)-\lambda\ln\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)-4\ln 2-\frac{1}{2}.$$

   c) Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to +\infty}\lambda\ln\left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda}\right)=-1$ et calculer $\lim\limits_{\lambda\to +\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session de contrôle (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 2