| | | | |
|---|---|---|---|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION | EXAMEN DU BACCALAURÉAT | Session de contrôle | 2024 |
| | Épreuve : **Mathématiques** | Section : **Sciences de l'informatique** | |
| | Durée : **3h** | Coefficient de l'épreuve: **3** | |

N° d'inscription | | | | | | |

*Le sujet comporte 4 pages.* ***(La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie)***

## Exercice N°1 :(5 points)

1) a) Vérifier que $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2=6-6i\sqrt{3}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+\left(1-3i\sqrt{3}\right)z-8=0$.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$, $z_B=-2+2i\sqrt{3}$ et $z_D=-3+i\sqrt{3}$.

   Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle $(C)$ de centre O et de rayon 2.

   a) Montrer que le point A appartient au cercle $(C)$. Construire le point A.

   b) Montrer que $\overrightarrow{AD}=-4\vec{u}$. Construire le point D.

3) a) Vérifier que $z_B=z_A+z_D$. Construire alors le point B.

   b) Montrer que $z_D\overline{z_A}=4i\sqrt{3}$.

   c) Déduire que le quadrilatère OABD est un rectangle.

4) a) Tracer le cercle $(C')$ de centre D et de rayon 2. Justifier que $(C')$ passe par le point B.

   b) Déduire que la droite $(AB)$ est tangente aux cercles $(C)$ et $(C')$.

## Exercice N°2 :(4 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E): 10x-9y=13$.

1) Justifier que l'équation $(E)$ admet au moins une solution.

2) a) Montrer que pour tout entier relatif m, $10m\equiv m[9]$ et que $-9m\equiv m[10]$.

   b) Soit $(x,y)$ une solution de l'équation $(E)$. Montrer que $x\equiv 4[9]$ et que $y\equiv 3[10]$.

   c) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est $\left\{(4+9k,3+10k),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3) Soit $(a,b)$ une solution de l'équation $(E)$ et $d=\text{PGCD}(a,b)$.

   Montrer que $d=1$ ou $d=13$.

4) a) Justifier que $1448 \equiv 5[13]$ et que $5^4 \equiv 1[13]$.

b) Montrer que $1448^{2412} \equiv 1[13]$.

5) Déduire le $\text{PGCD}\left(4+9\times 1448^{2412}\ ,\ 3+10\times 1448^{2412}\right)$.

## Exercice N°3 :(5 points)

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \sqrt{e+1} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+3e}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{e}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \dfrac{3}{4}\left(e - u_n^2\right)$.

c) En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante.

d) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

2) Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - e$.

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer $v_n$ en fonction de n et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{e+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}$.

c) Calculer la limite de la suite $(u_n)$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $T_n = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{4}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = (n+1)e + \dfrac{4}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n}{n}$.

## Exercice N°4 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2-x)e^{x-1}$. On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(1-x)e^{x-1}$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, $(C_g)$ et $(C_h)$ les courbes représentatives respectives des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=2e^{x-1}$ et $h(x)=xe^{x-1}$.

- La courbe $(C_h)$ passe par l'origine du repère.
- Les courbes $(C_g)$ et $(C_h)$ se coupent uniquement au point d'abscisse 2.

3) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-h(x)=2f'(x)$.

   b) En déduire la position relative de $(C_f)$ et $(C_h)$.

4) a) Vérifier que le point $P(0,2e^{-1})$ appartient à la courbe $(C_g)$. Placer alors le point P.

   b) Montrer que P est un point d'inflexion pour la courbe $(C_f)$.

   c) Montrer que la tangente T à la courbe $(C_f)$ au point P a pour équation $y=e^{-1}(x+2)$.

   d) Tracer T et $(C_f)$.

5) Pour $x\in\left]-\infty,2\right]$, on considère les points $M(x,g(x))$ et $N(x,h(x))$.

   a) Montrer que $MN=f(x)$.

   b) Déterminer la valeur maximale de la distance MN.

6) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes $(C_f)$, $(C_h)$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

   Montrer que $\mathcal{A}=2$.

Section : .................... N° d'inscription : ............... Série : .......

Nom et Prénom : .......................................................................

Date et lieu de naissance : .............................................................

Signatures des surveillants

..............................

..............................

# Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
## Session de contrôle (2024)
## Annexe à rendre avec la copie

**Figure 1**

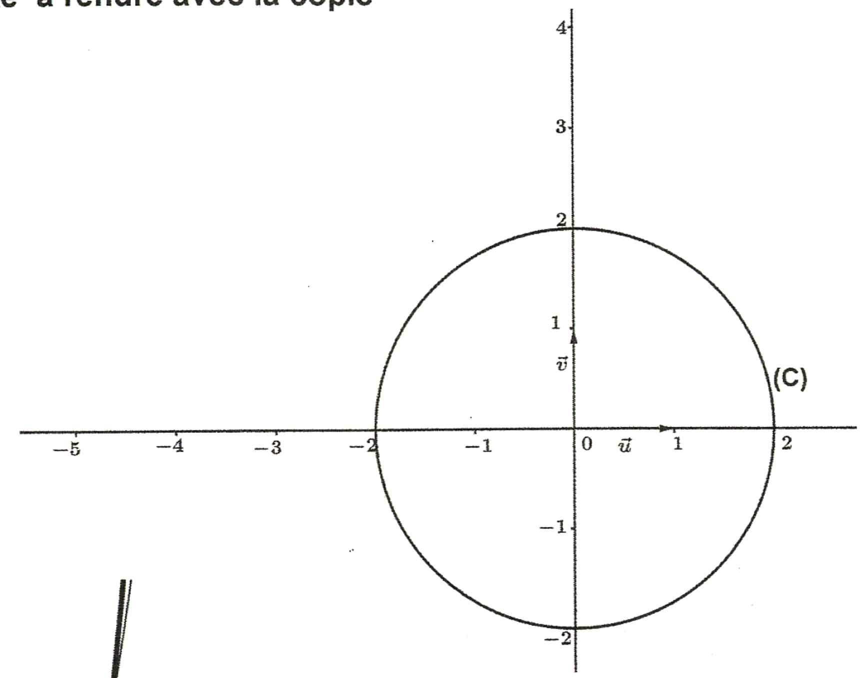


**Figure 2**